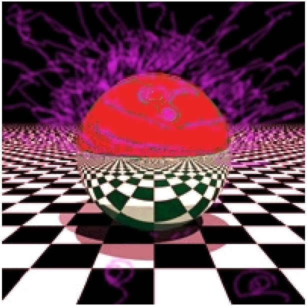
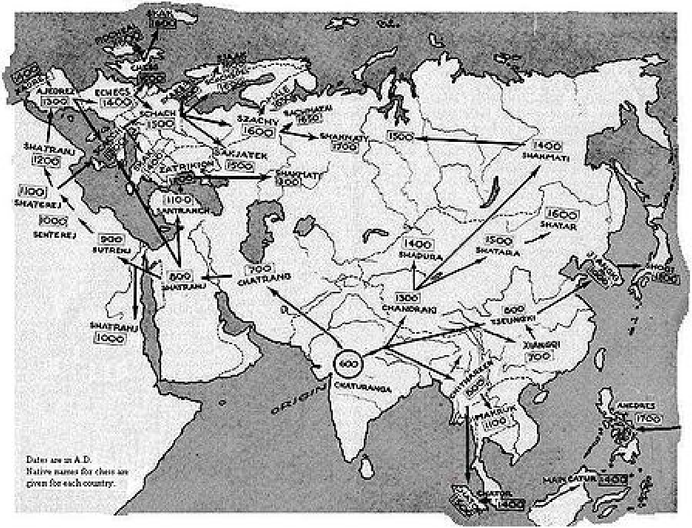
Scacchi e Matematica
Mathesis

13/01/2010



Origini

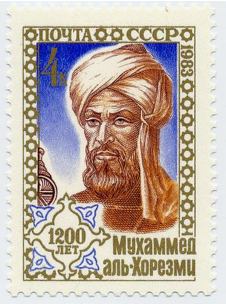
- India $\approx$ VI secolo - Chaturanga
- Quadruplice Armata: Fanti, Cavalieri, Elefanti, Carri
- $\Rightarrow$ Persia
  $\Rightarrow$ Mondo Islamico
  $\Rightarrow$ Europa


AJEDREZ 1300
ECHECS 1400
SCHACH 1500
SZACHY 1600
SAKJATEK 1500
SHAKHMATY 1700
1500
1400 SHAKMATI
SHATRANJ 1200
1100 SHATEREJ
1000 SENTEREJ
900 SUTRENJ
ZATRIKION
1100 SANTRANCH
800 SHATRANJ
700 CHATRANG
SHATRANJ 1000
1400 SHADURA
1500 SHATARA
1600 SHATAR
1300 CHANDRAKI
800 TSEUNGKI
XIANGQI 700
600
CHATURANGA
ORIGIN
MAKRUK 1100
AHEDRES 1700
MAH CATUR 1400
CHATUR 1400
Dates are in A.D.
Native names for chess are given for each country.

- $\approx$ 1000 Europa (Spagna, Sicilia, ...)
- Forma attuale: $\approx$ 1400

Notazione Posizionale

- India $\approx$ VI secolo : Notazione Posizionale (e Zero)
- $\Rightarrow$ Persia $\Rightarrow$ Mondo Islamico $\Rightarrow$ Europa



Al-Khwarizmi - IX secolo

Primi Campioni

- I Torneo: Londra 1851 (Adolf Anderssen) 
  Laurea in Matematica all'Università di Breslau; insegna matematica Friedrichs Gymnasium dal 1847 dal 1879.
- I Campione del mondo: Wilhelm Steinitz; 1886–1894

- Emanuel Lasker - Scacchista e Matematico

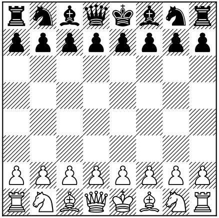
  Campione del Mondo dal 1894 al 1921.
  Studia matematica e filosofia a Berlino e Heidelberg.
  Dottorato in matematica a Erlangen (1900–1902), su consiglio di D. Hilbert
- Lasker ha ottenuto importanti risultati in Algebra commutativa:
  E. Lasker –E. Noether, Teoremi di Decomposizione primaria di Ideali

Altri Scacchisti-Matematici

- Machgielis (Max) Euwe (1901-1981).

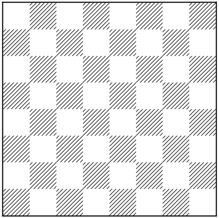
  Campione del Mondo 1935-1937 
- J. Nunn (1955-), uno dei più forti grandi maestri degli ultimi anni. PhD in Topologia Algebrica ad Oxford,

Scacchi



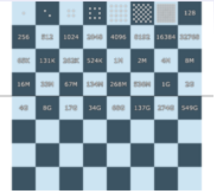
- Insieme di Regole Semplici;
- Universo finito;
- $\Rightarrow$ Enorme Complessità

La Ricompensa



- 1 chicco di riso sulla prima casa;
- 2 chicchi sulla seconda casa;
- 4 chicchi sulla terza casa;

  ...



$$1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{63} = 2^{64} - 1 =$$

$$= 18.446.744.073.709.551.615 \approx 18 \cdot 10^{18}$$

1. Prima metà della scacchiera: $2^{32} - 1 = 4,294,967,295$ chicchi. Circa la produzione annuale dell'India.
2. Seconda metà della scacchiera:

$$2^{64} - 2^{32} = 2^{32}(2^{32} - 1)$$

3. Solo nell'ultima casa:
più di due miliardi di volte tutta la prima metà della scacchiera.

Crescita esponenziale

Quante volte dobbiamo piegare un foglio di carta per ottenere una pila di carta alta quanto la distanza dalla terra al sole ?

- Un foglio di carta ha lo spessore di circa un decimo di millimetro: 10^{-4} metri.
- Distanza terra–sole: $\approx 1.5 \cdot 10^{11}$ metri.
- $$2^{50} \approx 1.1 \cdot 10^{15}$$

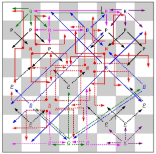
Risposta

$$51 \text{ volte}$$

Raddoppiare 11 volte ...

$$2^{11} \cdot 10^{-4} m = 0.2048\mathrm{m} \approx 20 \ \ \mathrm{cm}$$

Complessità



C. Shannon (1950): Programming a Computer for Playing Chess

- Quante possibili partite ?
- Quante possibili posizioni ?

Stima del Numero di Partite; C. Shannon (1950)

Numero "tipico" di mosse: circa 30 (DeGroot, 1946: media su un consistente numero di partite).
$\Rightarrow$ circa 10^3 possibilità per turno Bianco-Nero.
$\Rightarrow$ Considerando una lunghezza "tipica" di 40 mosse:

$$\approx \left(10^3\right)^{40} = 10^{120}$$

superiore al numero degli atomi dell'universo osservabile (tra $4 \cdot 10^{79}$ e 10^{81}).

G.H. Hardy (1940)

Hardy scrive (senza ulteriori spiegazioni) che "probabilmente, il numero di partite di scacchi è dell'ordine di grandezza"

$$\approx 10^{10^{50}}$$

Stima del Numero di Posizioni

C. Shannon; 1950

Numero stimato di posizioni 'ammissibili':

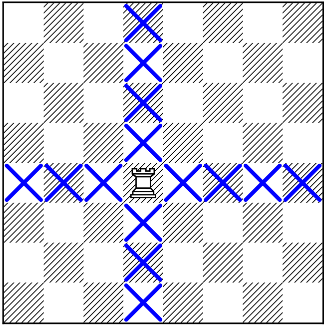
$$\frac{64!}{32!\,(8!)^2\,(2!)^6} \approx 10^{43}$$

Numero di Posizioni dopo n (semi)mosse

- 1 semimossa: 20;
- 2 semimosse: 400;
- 3 semimosse: 5362;
- 4 semimosse: 72.078
- 5 semimosse: 822.518;
- 6 semimosse: 9.417.681;
- 7 semimosse: 96.400.068.

Fonte: The on-line Encyclopedia of integer sequences.
Sequenza: A0832776 (fino a 9 semimosse).

Torre

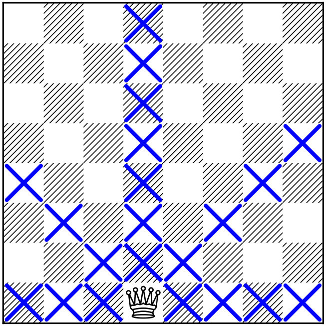


Numero di case controllate: sempre 14

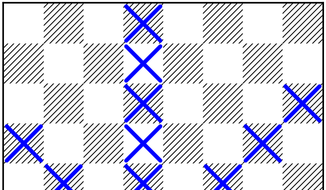
Forza relativa della Torre

$$\frac{14}{63} = \frac{2}{9}$$

Regina



Per le 28 case del bordo:
$14 + 7 = 21$



Per le 20 case del 'secondo bordo':

Regina/Due Torri

Forza relativa della Regina

$$\frac{1}{63}\left(\frac{(28\cdot 21)+(20\cdot 23)+(12\cdot 25)+(4\cdot 27)}{64}\right)=$$

$$=\frac{13}{36}$$

$$\frac{2}{9}+\frac{2}{9}=\frac{16}{36}>\frac{13}{36}$$

$\Rightarrow$ Due Torri sono più forti di una Regina

Esercizio

Problema

Qual'e' la probabilità che due regine poste a caso sulla scacchiera siano "indipendenti" (non si attacchino) ?

Soluzione:

Usiamo la formula della Probabilità Totale:

$$P(I) = \sum_{i=1}^{4} P(I|A_i)P(A_i)$$

dove A_i = la regina A si trova sull' i-esimo bordo.

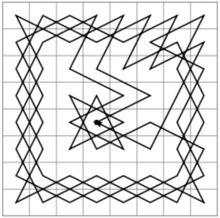
- $P(A_1) = \frac{28}{64}$, $P(I|A_1) = \frac{42}{63}$;
- $P(A_2) = \frac{20}{64}$, $P(I|A_2) = \frac{40}{63}$;
- $P(A_3) = \frac{12}{64}$, $P(I|A_3) = \frac{38}{63}$;
- $P(A_4) = \frac{4}{64}$, $P(I|A_4) = \frac{36}{63}$;

Quindi:

$$P(I) = \frac{28}{64}\frac{42}{63} + \frac{20}{64}\frac{40}{63} + \frac{12}{64}\frac{38}{63} + \frac{4}{64}\frac{36}{63} = \frac{2576}{4032} \approx 0.639$$

Problemi

1. Numero massimo di pezzi (di dato tipo) che si possono disporre senza 'attaccarsi' ? (Indipendenza)
2. Numero minimo di pezzi (di dato tipo) che 'attaccano' o 'occupano' ogni casa ? (Dominazione)
3. Percorsi: il pezzo visita tutte le case una sola volta.



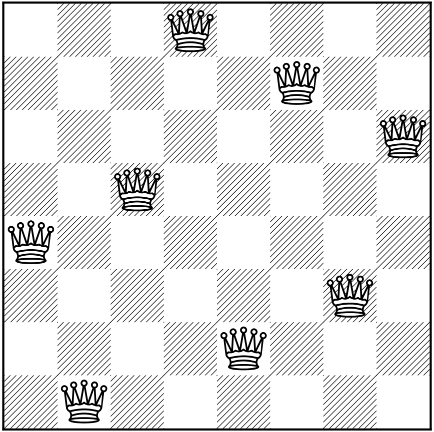
Indipendenza - Regina su 8×8

Su una scacchiera 8×8 possono essere diposte 8 regine in modo che nessuna attacchi l'altra.

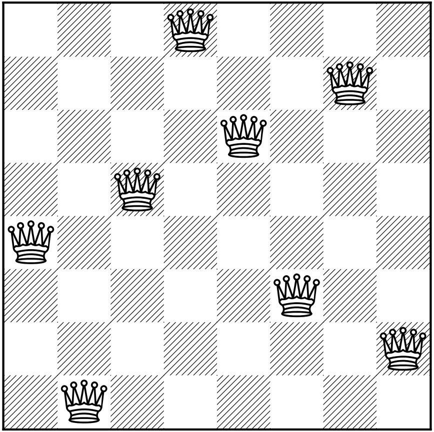
- Vi sono 92 modi distinti di disporle su una 8×8.
- 12 modi a meno di simmetrie (rotazioni e riflessioni).
  $92 = (11 \cdot 8) + 4$

C.F. Gauss nel 1850 (in una lettera ad un amico) scrive di aver trovato 72 soluzioni, ma che ve ne possono essere ancora.
Si veda anche: P. Campbell, *Gauss and the eight queens problem*, Historia Mathematica **4** (1997), 397–404.

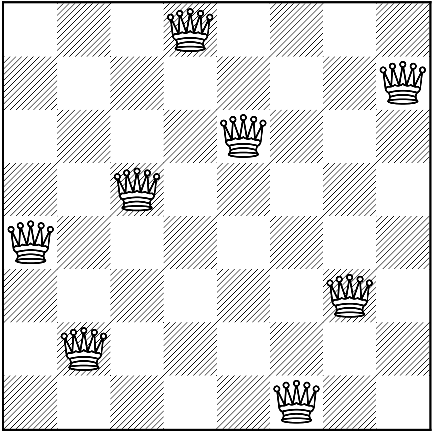
1



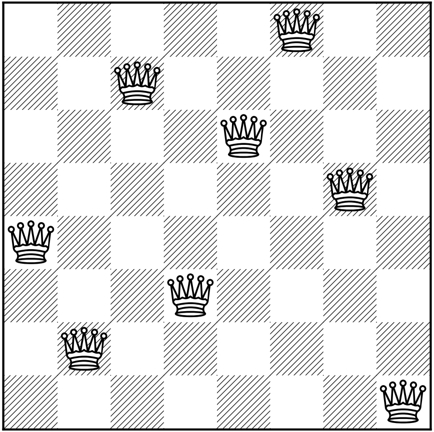
2



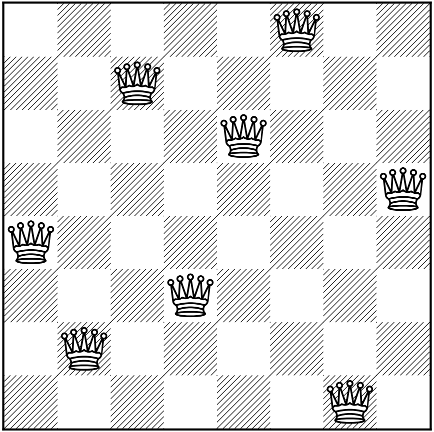
3



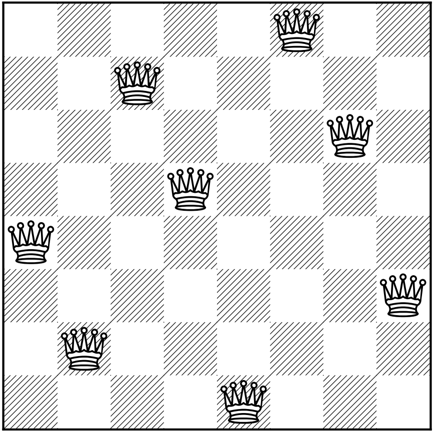
4



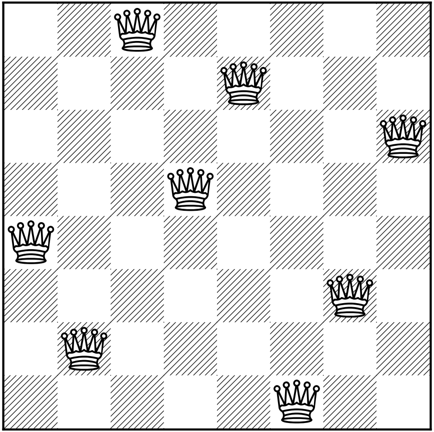
5



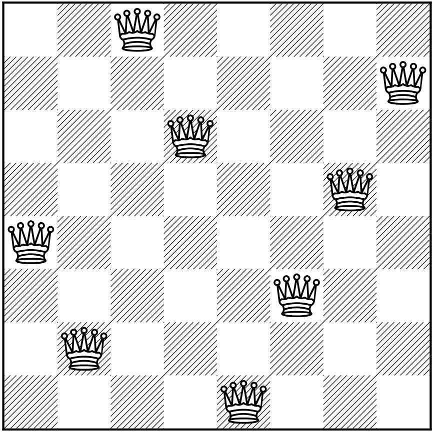
6



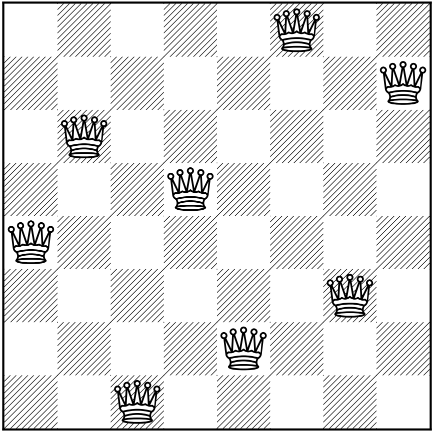
7



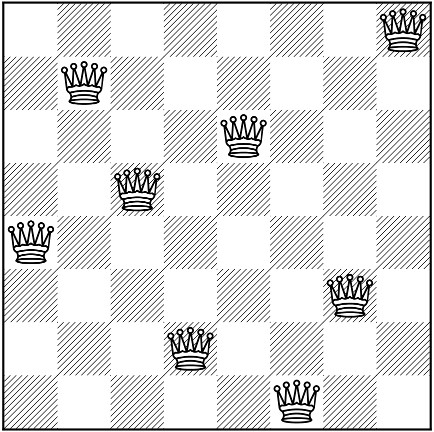
8

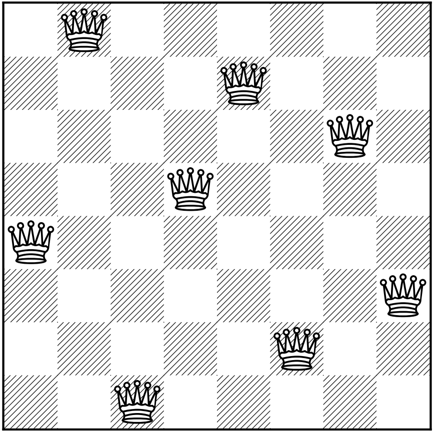


9

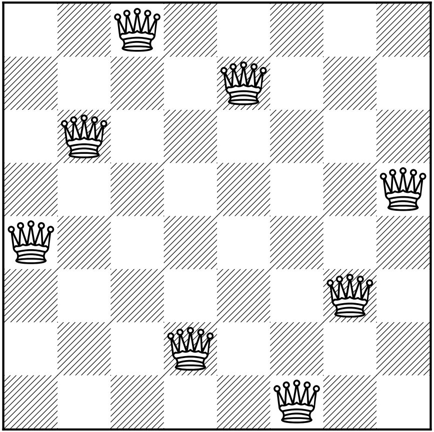


10





12 *



Più in generale, qual'è il massimo numero di regine "indipendenti" (ovvero che non si attacchino a vicenda) che possono essere disposte su una scacchiera $n \times n$?

W. Ahrens; 1901

Su una scacchiera $n \times n$, se $n \neq 2, 3$, possono essere disposte n Regine, in modo che nessuna attacchi l'altra.

$n \times n$: in quanti modi diversi ?

$F(n)$: numero di soluzioni *fondamentali*.
$S(n)$: numero totale di soluzioni.

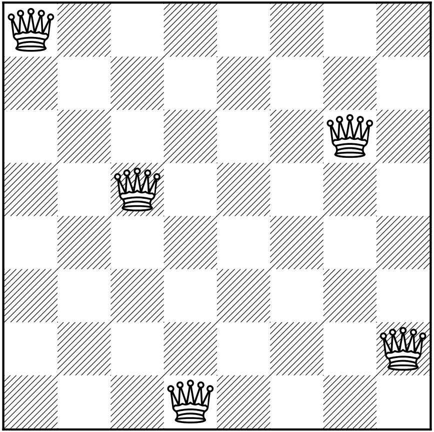
- $F(8) = 12$, $S(8) = 92$;
- $F(9) = 46$, $S(9) = 342$;
- $F(10) = 92$, $S(10) = 724$;
- $F(11) = 341$, $S(11) = 2680$;
- $F(12) = 1784$, $S(12) = 14200$.

Dominazione con Regine

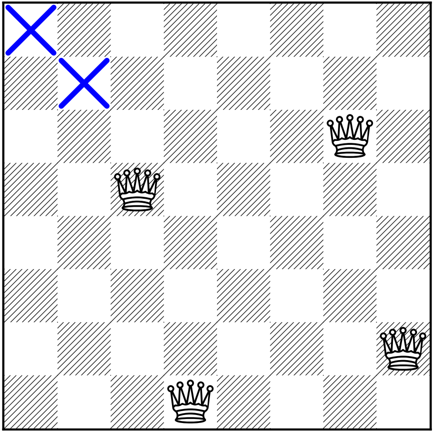
Su una scacchiera 8×8 sono necessarie, e sufficienti, 5 Regine per coprire o occupare ogni casa

Vi sono 4860 modi distinti di disporre 5 regine, su una 8×8, in modo che 'coprano' la scacchiera (Yaglom e Yaglom).

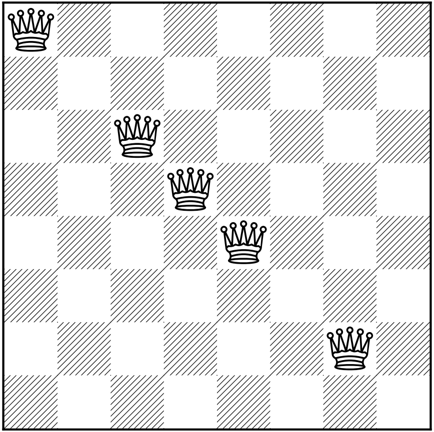
Esempio



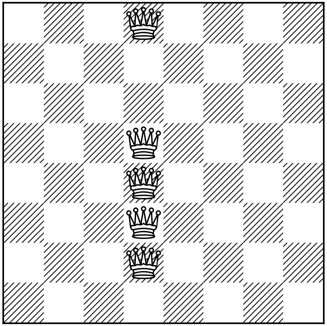
Osservazione: quattro regine possono coprire 62 case!



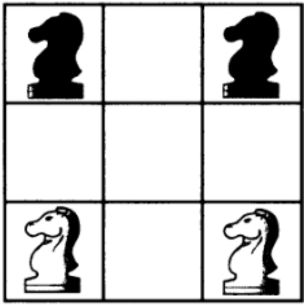
Esempio Diagonale



Altra configurazione “dominante” con 5 regine su una linea

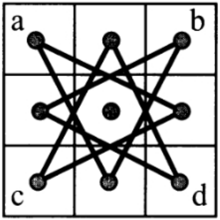


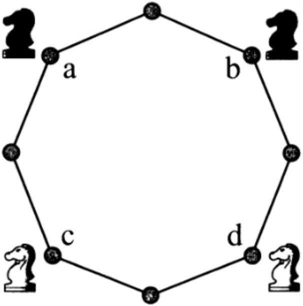
Problema di Guarini (1512)



Scambiare di posto le due coppie di cavalli.

Soluzione





La "traduzione" in termini di grafo rende la soluzione evidente.

Grafi

Indipendenza

- Un sottoinsieme di vertici S di un grafo $\mathcal{G}$ si dice un *insieme indipendente in* $\mathcal{G}$ se nessuno dei vertici di S è adiacente ad alcun vertice di S.
- Si definisce *numero di indipendenza*

$$\iota(\mathcal{G})$$

la massima cardinalità di un insieme indipendente di $\mathcal{G}$.
(Un insieme indipendente S di $\mathcal{G}$ si dice *massimo* se $\mid S \mid = \iota(\mathcal{G})$)

Dominazione

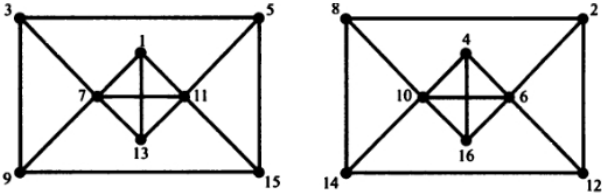
- Un sottoinsieme di vertici S di un grafo $\mathcal{G}$ si dice un *insieme dominante in* $\mathcal{G}$ se ogni vertice di $\mathcal{G}$ è in S oppure è adiacente ad un vertice di S.
- Oss.: indipendente max. $\Rightarrow$ dominante.
- Si definisce *numero di dominazione*

$$\delta(\mathcal{G})$$

la minima cardinalità di un insieme dominante di $\mathcal{G}$.
(Un insieme dominante S di $\mathcal{G}$ si dice *minimo* se $\mid S \mid = \delta(\mathcal{G})$)

Grafo di Alfiere $A_{4\times4}$

1	2	3	4
8	7	6	5
9	10	11	12
16	15	14	13



L'insieme $\{1, 5, 9, 2, 4, 14\}$ è un insieme indipendente di cardinalità massima di $A_{4\times4}$.
Quindi $\iota(A_{4\times4}) = 6$.
L'insieme $\{7, 11, 10, 6\}$ è un insieme dominante di $A_{4\times4}$.
È di cardinalità minima: quindi $\delta(A_{4\times4}) = 4$.

Grafo di Regina $Q_{n\times n}$

Abbiamo visto che, per $n \neq 2, 3$,

$$\iota(Q_{n\times n}) = n$$

mentre

$$\iota(Q_{2\times 2}) = 1 \qquad \iota(Q_{3\times 3}) = 2.$$

Problema aperto

$$\delta(Q_{n\times n}) = ?$$

Osservazione: dominazione diagonale $\neq$ dominazione

Il numero minimo di regine che domininano una scacchiera $n \times n$ può variare se si richiedono condizioni aggiuntive, per esempio che stiano tutte sulla stessa diagonale.
Ad esempio:

$$\delta(Q_{11\times 11}) = 5$$

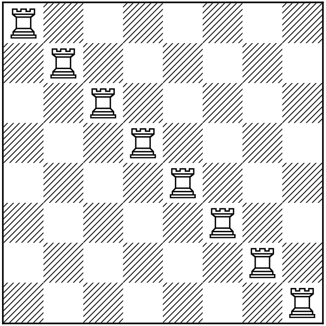
ma

$$\mathrm{diag}\delta(Q_{11\times 11}) = 7.$$

(mentre $\delta(Q_{8\times 8}) = \mathrm{diag}\delta(Q_{8\times 8})$).

Indipendenza in $T_{n\times n}$

- $\iota(T_{n\times n}) \leq n$
- $\iota(T_{n\times n}) = n$

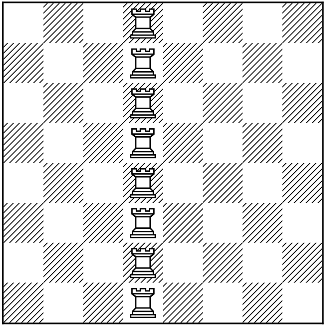


Numero di disposizioni indipendenti massime di torre

- Ognuna delle n torri deve trovarsi in righe e colonne diverse.
- Abbiamo quindi
$$n!$$
disposizioni
- Per la scacchiera usuale, con $n = 8$, abbiamo
$$8! = 40.320$$
possibilità.

Dominazione in $T_{n \times n}$

- $\delta(T_{n \times n}) \geq n$
- $\delta(T_{n \times n}) = n$



Numero di configurazioni dominanti minime di torre

- Deve esserci una torre in ogni riga o una torre in ogni colonna.
- Una torre in ogni riga: n^n possibilità.
- Una torre in ogni colonna: n^n possibilità.
- Per la scacchiera usuale $n \times n$, abbiamo

$$n^n + n^n - n!$$

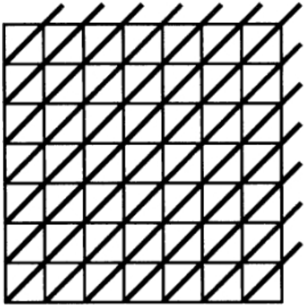
  possibilità.
- Per la scacchiera usuale, con $n = 8$, abbiamo

$$2 \cdot 8^8 - 8! = 33.514.312$$

  possibilità.

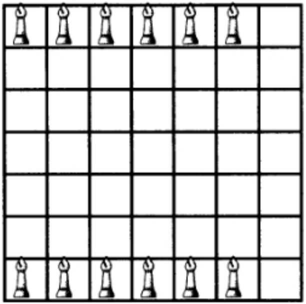
Indipendenza in $A_{8\times 8}$

$\iota(A_{8\times 8}) \leq 14$



Indipendenza in $A_{8\times 8}$

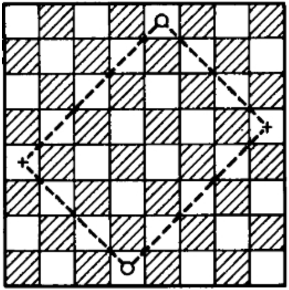
$\iota(A_{8\times 8}) = 14$



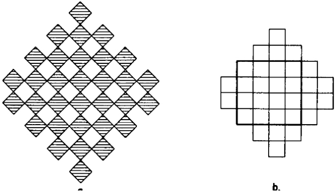
Indipendenza in $A_{n\times n}$

- $$\iota(A_{n\times n}) = 2n - 2$$
- Si può dimostrare che in ogni configurazione indipendente massima gli alfieri devono stare tutti sul bordo.

Il numero di configurazioni indipendenti massime in $A_{n\times n}$ è 2^n.



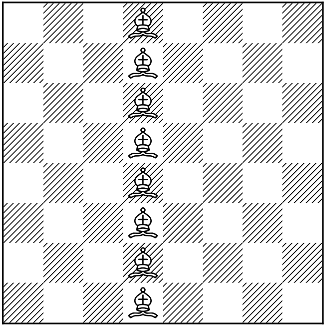
Dominazione in $A_{8\times 8}$

- Bianco e nero: separatamente.
- 

  Alfiere $\Rightarrow$ Torre
- $\delta(A_{8\times 8}) \geq 4 + 4 = 8$

Dominazione in $A_{8\times 8}$

$$\delta(A_{8\times 8}) = 8$$



Dominazione in $A_{n\times n}$

- $$\delta(A_{n\times n}) = n$$
- Sono note formule per il numero di configurazioni dominanti minime di Alfiere su $n \times n$. Però sono complicate (si veda Yaglom e Yaglom, pagg. 83–88):

Case 1: $n = 4k$. Here we need $2k$ black bishops and $2k$ white bishops. Reasoning as in part a, we find that $x = y = (2k)!\,(4k+1)/2$.

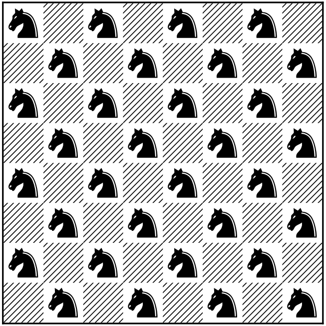
Case 2: $n = 4k + 1$. Here there are $2k$ black bishops and $2k + 1$ white bishops. Reasoning as in part c we find for $k > 0$ that

$$x = (2k)!, \qquad y = 2\Big\{(2k-1)\binom{2k+1}{3}(2k-2)! + \binom{2k-1}{2}\binom{2k+1}{2}\binom{2k-1}{2}(2k-3)! + (k+1)(2k+2)(2k-1)\binom{2k}{2}(2k-2)! + \frac{2(k+1)}{3}(3k^3+7k^2+5k)(2k-1)!\Big\} - (2k+1)!$$

-

Indipendenza in $C_{8\times 8}$

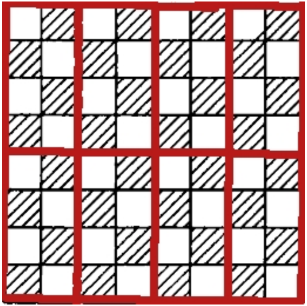
$\iota(C_{8\times 8}) \geq 32$



Indipendenza in $C_{8\times 8}$

- In ogni rettangolo, un cavallo controlla esattamente un'altra casa del rettangolo.
- In ogni rettangolo ci possono essere al piu' 4 cavalli "indipendenti"
- Quindi

$$\iota(C_{8\times 8}) = 32$$



Indipendenza in $C_{n\times n}$

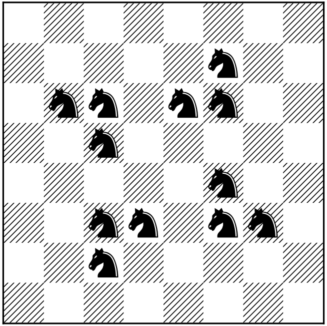
- Per $n \neq 2$ ($\iota(C_{2\times 2}) = 4$) si ha:
- se n è pari

$$\iota(C_{n\times n}) = \frac{n^2}{2}$$

- se n è dispari

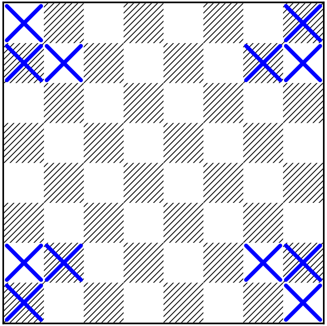
$$\iota(C_{n\times n}) = \frac{n^2+1}{2}$$

Dominazione in $C_{8\times 8}$



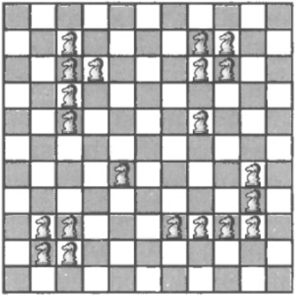
12 cavalli sono sufficienti per dominare una scacchiera

12 Cavalli



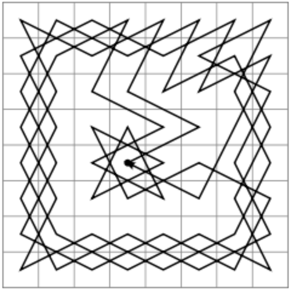
- 12 cavalli sono anche necessari per 8×8.
  Infatti, un cavallo può coprire al più una $\times$-casa
- $\Rightarrow \delta(C_{8\times8}) = 12$.

$n = 11$ (1971 !)

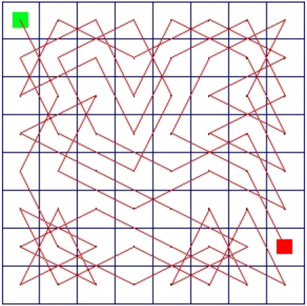


Problema aperto: determinare $\delta(C_{n\times n})$ per ogni n.

Percorsi Cavallo: 8×8

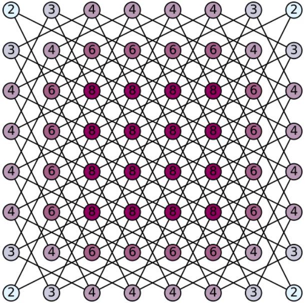


Percorso chiuso (ciclo)



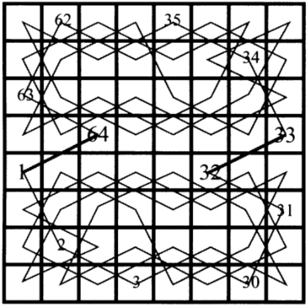
Percorso aperto

$C_{8\times 8}$



Sono cicli (risp. cammini) hamiltoniani in $C_{8\times 8}$.

Eulero (1759)



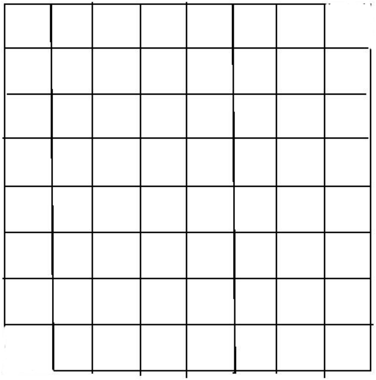
Consiste in due cammini aperti, nelle metà inferiore e superiore della scacchiera, che si congiungono (ha simmetria centrale).

Esistenza **ciclo** di cavallo su $8 \times 8 \Rightarrow$ solo **due** configurazioni indipendenti massime di Cavallo in 8×8.

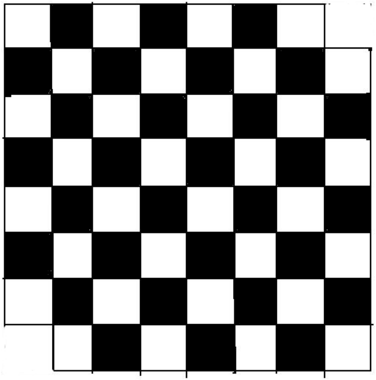
In generale

- Ci sono percorsi (chiusi) di cavallo su scacchiere $m \times n$?
- Non sempre: ad esempio 3×3.
  La casa centrale non è 'connessa' alle altre.

Divagazione: bianco e nero.
E' possibile tassellare con tessere del domino ?



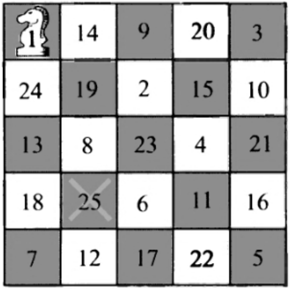
Risposta: No



Bianco e nero

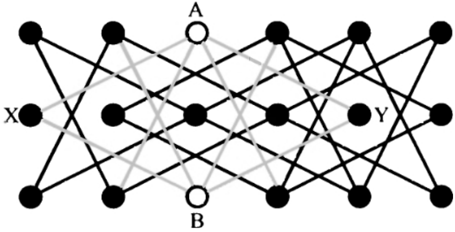
Il cavallo alterna case bianche e nere
$\Rightarrow$ Non esistono percorsi **chiusi** di cavallo su scacchere $m \times n$ se m e n sono entrambi dispari, perchè il numero di case bianche e nere è diverso !

5×5



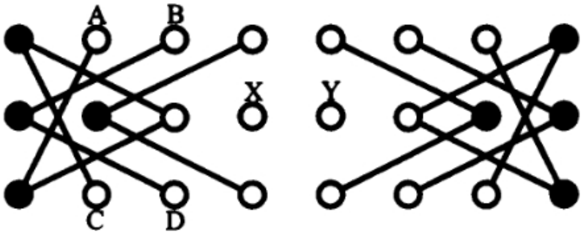
Ma esistono percorsi aperti su 5×5.

3×6



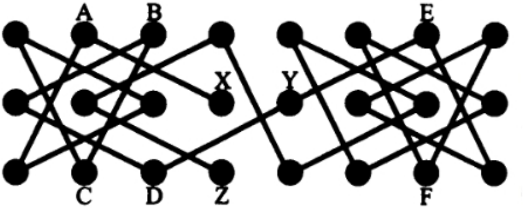
- Rimuovendo i vertici A e B da $C_{3\times6}$ si ottengono **tre** componenti connesse.
- $\Rightarrow$ non può esserci un ciclo hamiltoniano in $C_{3\times6}$ (se da una collana si rimuovono k grani, si formano al più k pezzi).

3×8



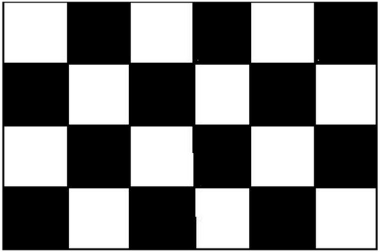
- Gli 8 vertici neri sono quelli di grado 2 in $C_{3\times 8}$
- Un ciclo hamiltoniano in $C_{3\times 8}$ deve necessariamente passare per i lati indicati.

3×8



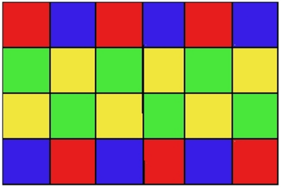
- Tenendo conto che non ci possono essere sottocicli, e della simmetria, ci si riconduce al cammino parziale indicato.
- $\Rightarrow$ non può esserci un ciclo hamiltoniano in $C_{3\times 8}$

$4 \times n$



Non esistono percorsi chiusi di cavallo su scacchiere $4 \times n$.

Dimostrazione!

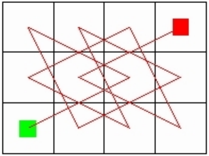


Dimostrazione!

B	A	B	A	B	A	B
D	C	D	C	D	C	D
C	D	C	D	C	D	C
A	B	A	B	A	B	A

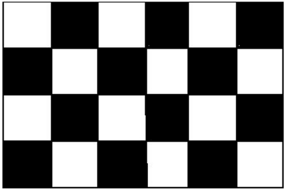
- A $\rightarrow$ C ;   C $\rightarrow$ A,D
- B $\rightarrow$ D ;   D $\rightarrow$ B,C
- Se esistesse un ciclo hamiltoniano, lo potremmo 'aprire' in un cammino hamiltoniano che inizia con A e termina con C.
- Ma per andare in B o D deve partire da C, e poi ritornarvi ! Si ottiene una contraddizione con $\#A = \#C$.
- $\Rightarrow$ non esiste un ciclo di cavallo su $4 \times n$.

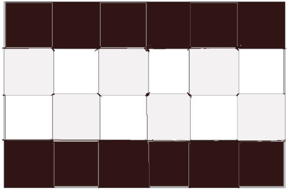
3×4



Ma esistono percorsi *aperti* su 4×3 (o 3×4)

Dimostrazione alternativa: bianco e nero.



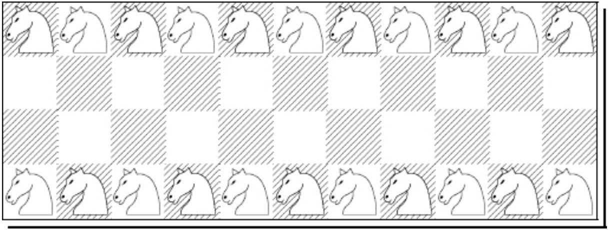


Il cavallo alterna tra bianco e nero.

Solo da bianco si arriva in nero.

Se esistesse un ciclo hamiltoniano, le due colorazioni dovrebbero coincidere!

Terza Dimostrazione !



Non può esistere un ciclo di cavallo su $4 \times n$ perchè ci sono più di due configurazioni indipendenti massime (quella raffigurata, oltre alle due 'monocromatiche').

Cicli di cavallo: in generale

Schwenk (1991)

In una scacchiera $m \times n$ ($m \leq n$) esiste sempre un ciclo di cavallo, con le sole seguenti eccezioni:

- m e n entrambi dispari;
- $m = 1, 2$ oppure 4;
- $m = 3$ e $n = 4, 6$ oppure 8.

Percorsi aperti di cavallo: in generale

Cull-Curtnis (1978); Chia-Ong (2005)

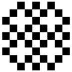
In una scacchiera $m \times n$ ($m \leq n$) esiste sempre un percorso aperto di cavallo, con le sole seguenti eccezioni:

- $m = 1$ oppure 2;
- $m = 3$ e $n = 3, 5$ oppure 6.
- $m = 4 = n$.

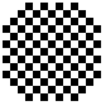
Distanza di Cavallo (su scacchiera illimitata)

1 mossa

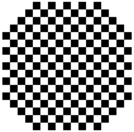
2 mosse



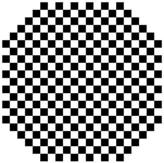
3 mosse



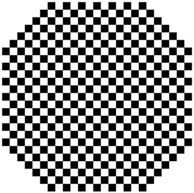
4 mosse



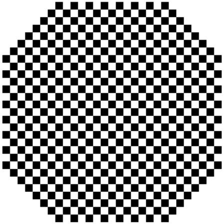
5 mosse



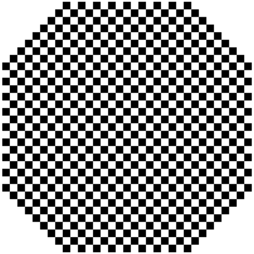
6 mosse



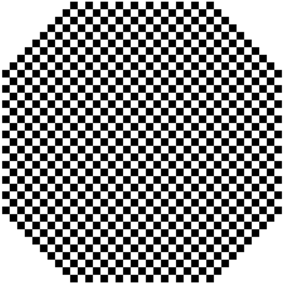
7 mosse



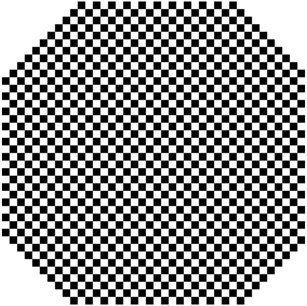
8 mosse



9 mosse



10 mosse

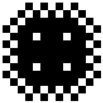


Palle di Cavallo (su scacchiera infinita)

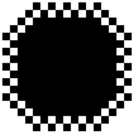
raggio 1

raggio 2

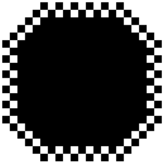
raggio 3



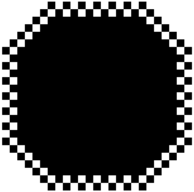
raggio 4



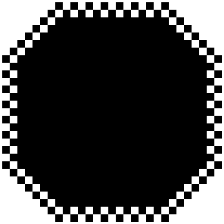
raggio 5



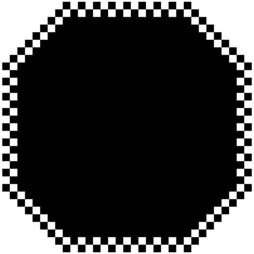
raggio 6



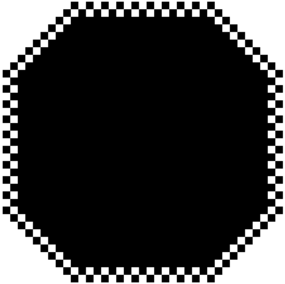
raggio 7



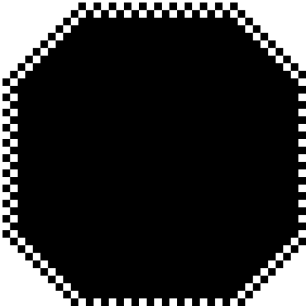
raggio 8



raggio 9



raggio 10



$d(n, m)$

N. Elkies

La distanza di cavallo $d(m, n)$ da $(0, 0)$ a (m, n) è

$$d(m,n) = \left\lceil \max\left\{ \frac{|\,m\,|}{2}, \frac{|\,n\,|}{2}, \frac{|\,m\,| + |\,n\,|}{3} \right\} \right\rceil$$

se $(m, n) \neq (\pm 1, 0), (0, \pm 1), (\pm 2, \pm 2)$.

Mentre

$$d(m,n) = \left\lceil \max\left\{ \frac{|\,m\,|}{2}, \frac{|\,n\,|}{2}, \frac{|\,m\,| + |\,n\,|}{3} \right\} \right\rceil + 2$$

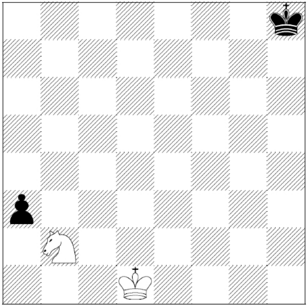
se $(m, n) = (\pm 1, 0), (0, \pm 1), (\pm 2, \pm 2)$.

Distanza di Cavallo su 8×8

5	4	5	4	5	4	5	6
4	3	4	3	4	5	4	5
3	4	3	4	3	4	5	4
2	3	2	3	4	3	4	5
3	2	3	2	3	4	3	4
2	1	4	3	2	3	4	5
3	4*	1	2	3	4	3	4
♘	3	2	3	2	3	4	5

La casa marcata con $*$ è a distanza 4 per la particolarità dell'angolo.

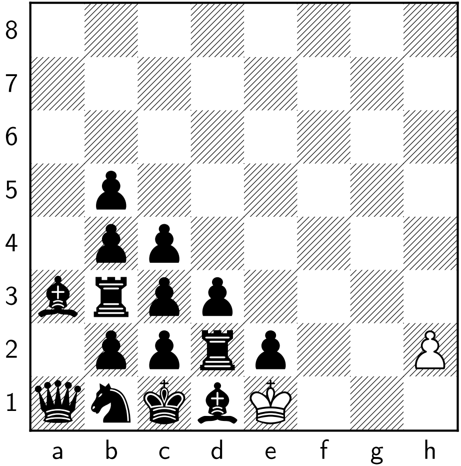
Il nero vince (con o senza tratto)



La casa *a*2 ha distanza 3 e la casa *a*1 ha distanza 4 !

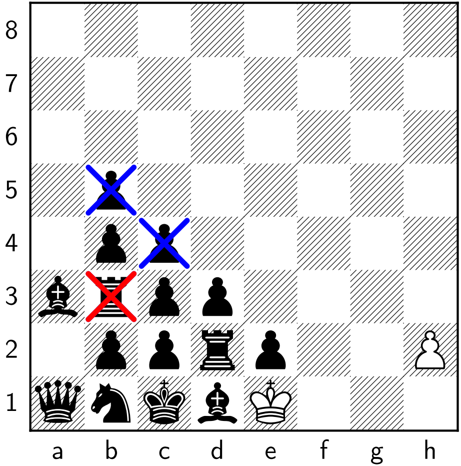
Il Bianco muove e vince.

Solo la regina nera si può muovere ($a1 - a2$) e il pedone bianco (se il re bianco si sposta i pezzi neri si 'sciolgono').



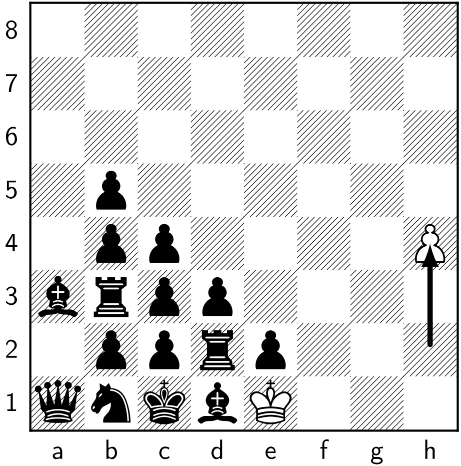
Strategia vincente.

L'unica possibilità di vittoria è dare matto (di cavallo) in *b*3, dopo aver eliminato i pedoni in *b*5 e *c*4. Occorre che però la regina nera sia in *a*1 !



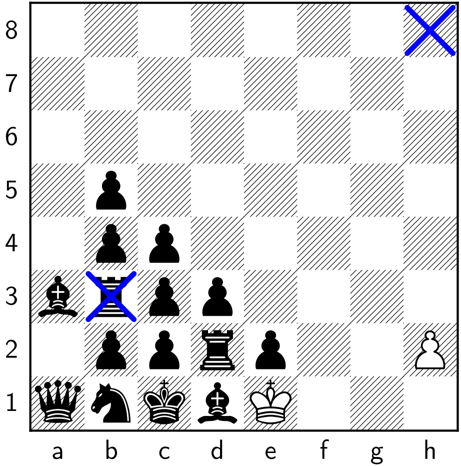
Errore !

In questo modo
il bianco può
solo pattare.



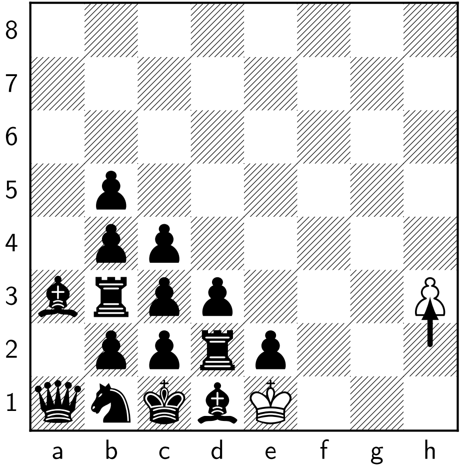
Parità

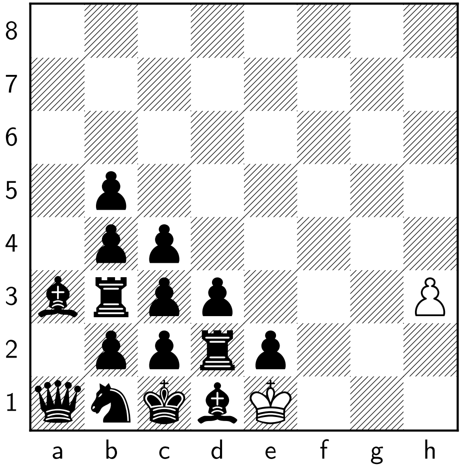
*h*8 si trova a distanza di cavallo *dispari* da *b*3.

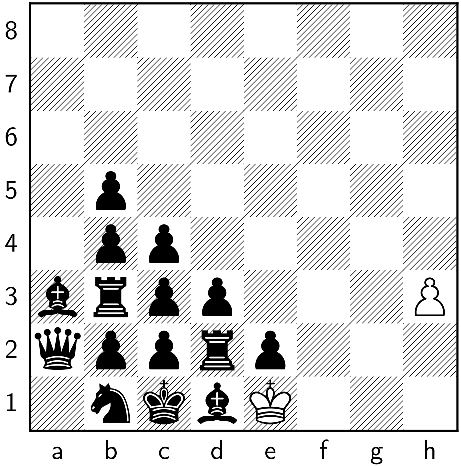


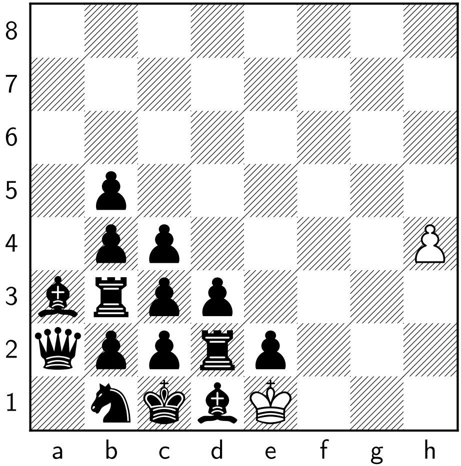
Soluzione

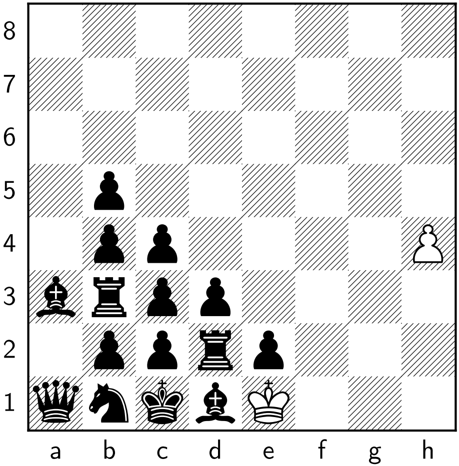
Si deve muovere il pedone solo di un passo.

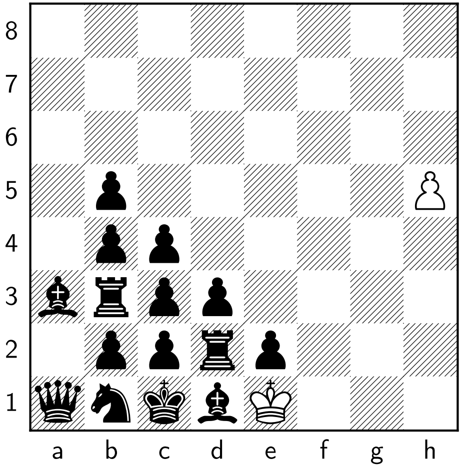


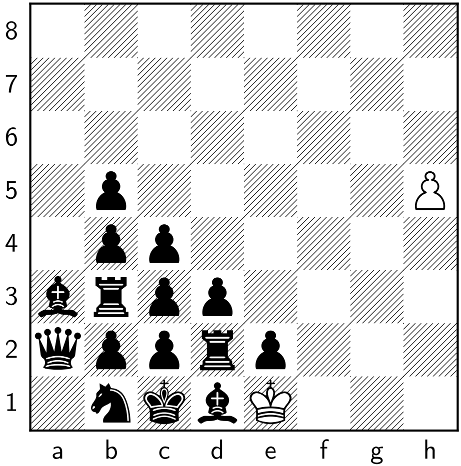

8 7 6 5 4 3 2 1
a b c d e f g h

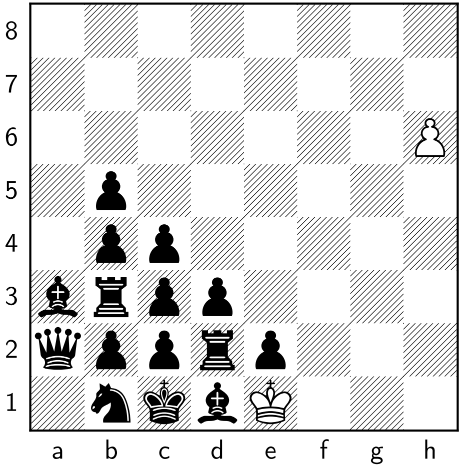

8
7
6
5
4
3
2
1
a b c d e f g h

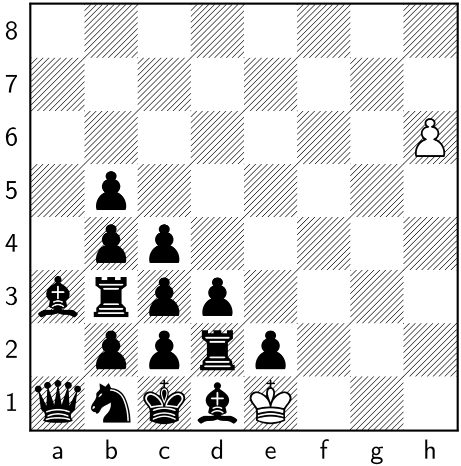

8
7
6
5
4
3
2
1
a b c d e f g h

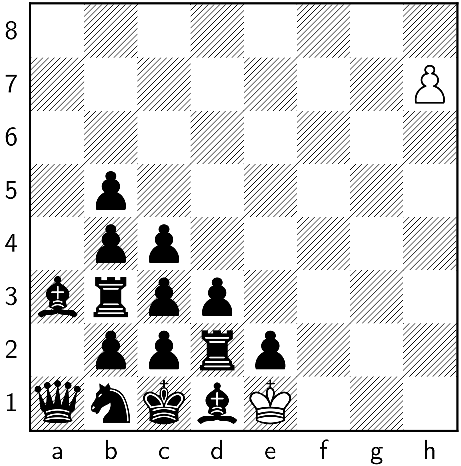

8
7
6
5
4
3
2
1
a b c d e f g h

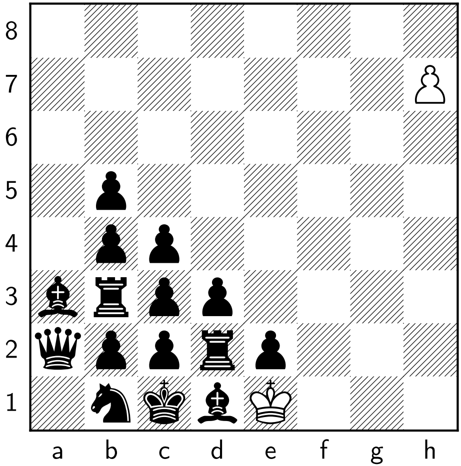

8
7
6
5
4
3
2
1
a b c d e f g h

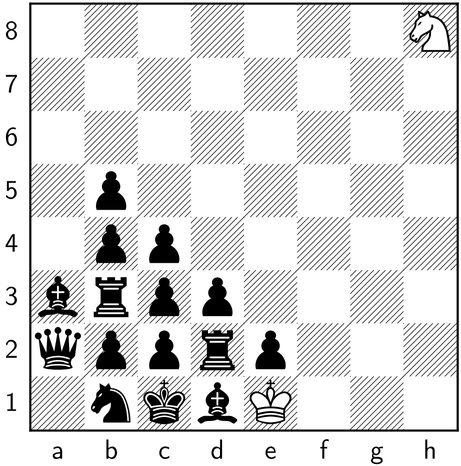

8
7
6
5
4
3
2
1
a b c d e f g h

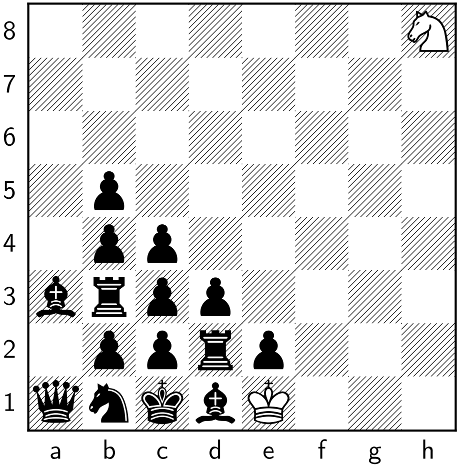

8
7
6
5
4
3
2
1
a b c d e f g h

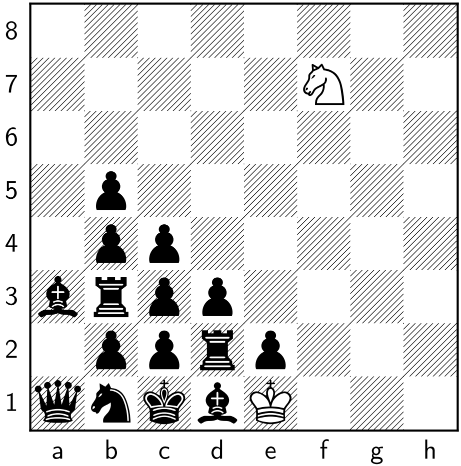

8
7
6
5
4
3
2
1
a b c d e f g h

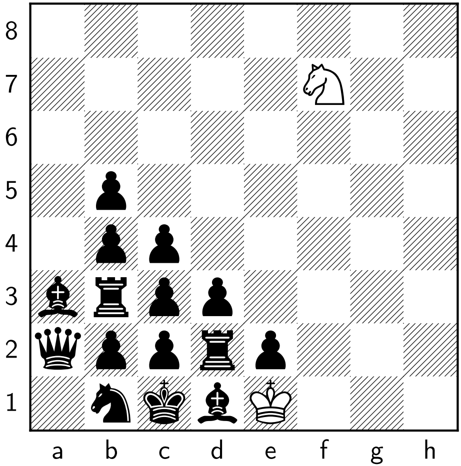

8
7
6
5
4
3
2
1
a b c d e f g h

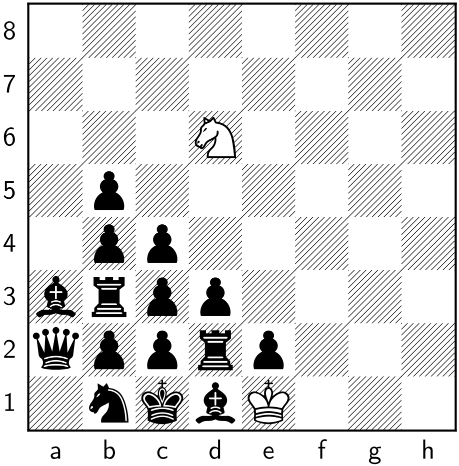

8
7
6
5
4
3
2
1
a b c d e f g h

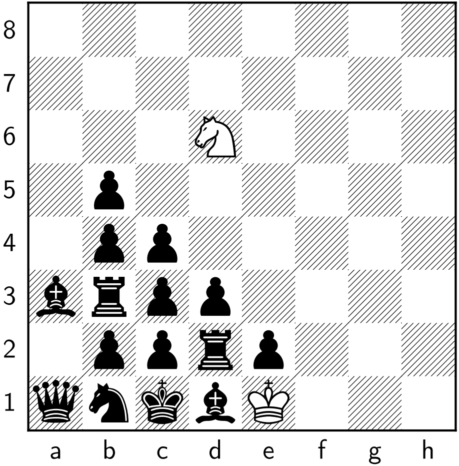

8
7
6
5
4
3
2
1
a b c d e f g h

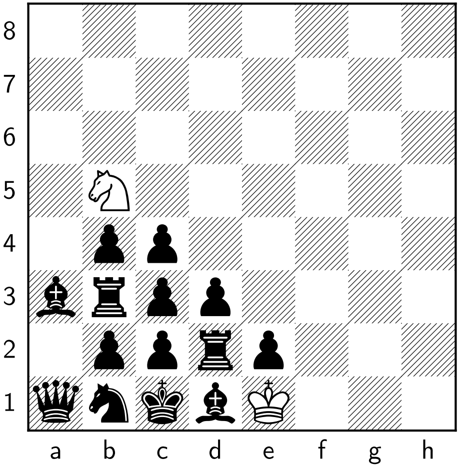


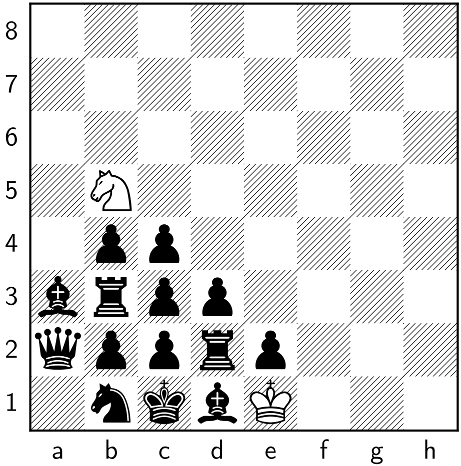

8 7 6 5 4 3 2 1
a b c d e f g h

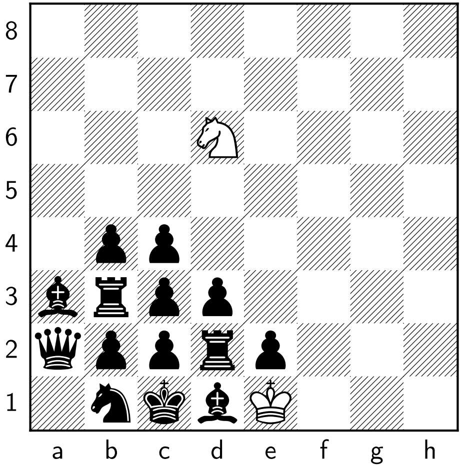

8
7
6
5
4
3
2
1
a
b
c
d
e
f
g
h

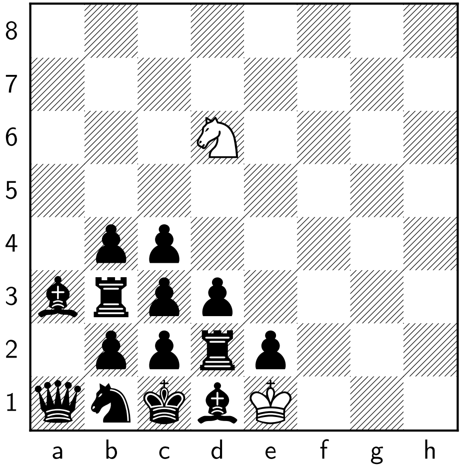

8
7
6
5
4
3
2
1
a b c d e f g h

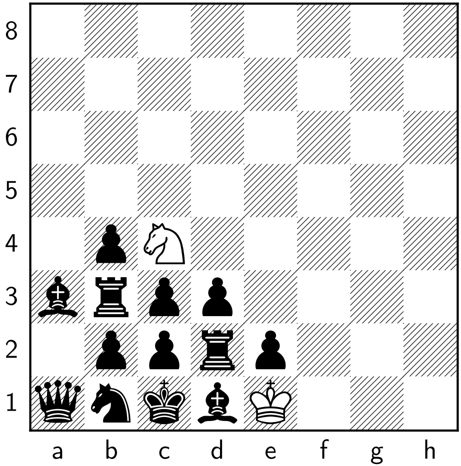

8
7
6
5
4
3
2
1
a b c d e f g h

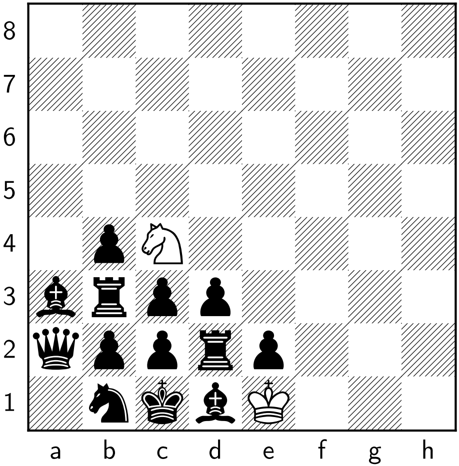

8
7
6
5
4
3
2
1
a b c d e f g h

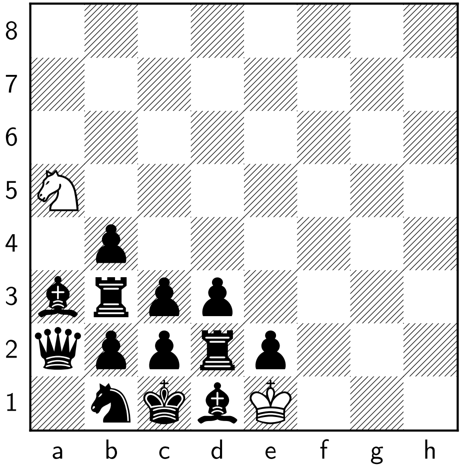

8
7
6
5
4
3
2
1
a b c d e f g h

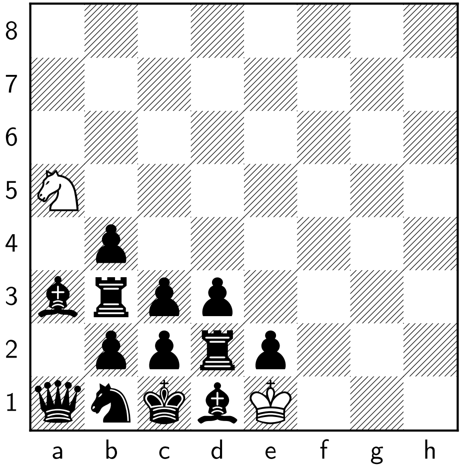

8
7
6
5
4
3
2
1
a b c d e f g h


8
7
6
5
4
3
2
1
a b c d e f g h

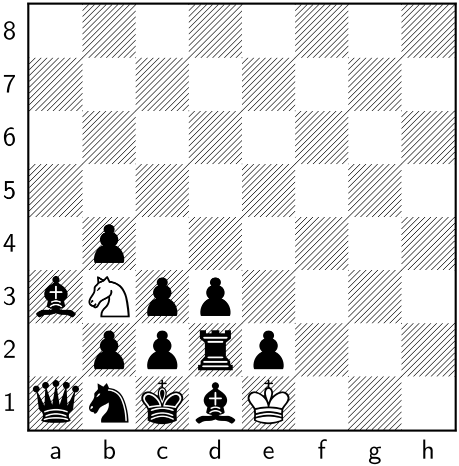

8
7
6
5
4
3
2
1
a b c d e f g h


8
7
6
5
4
3
2
1
a b c d e f g h

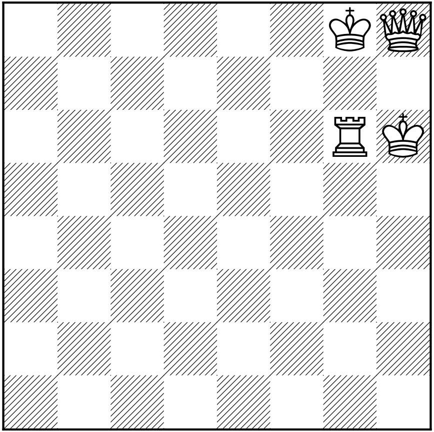

8
7
6
5
4
3
2
1
a b c d e f g h



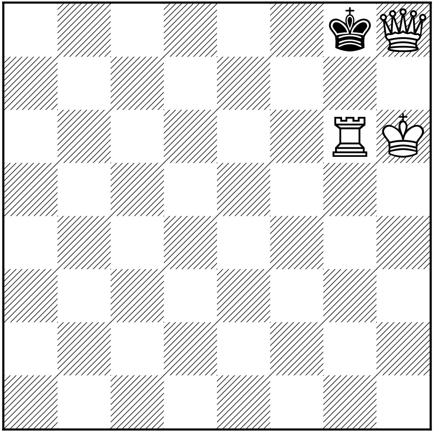
8
7
6
5
4
3
2
1
a b c d e f g h


8
7
6
5
4
3
2
1
a b c d e f g h

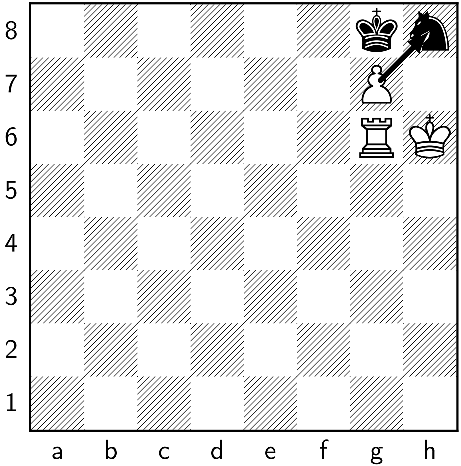
Colora i Pezzi



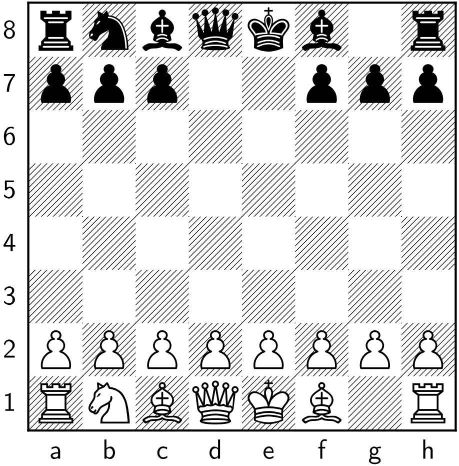
Soluzione



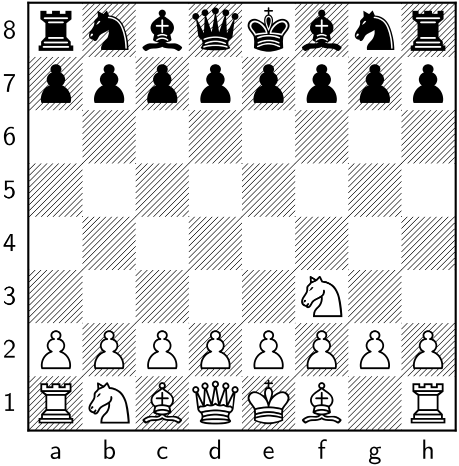
Mossa precedente



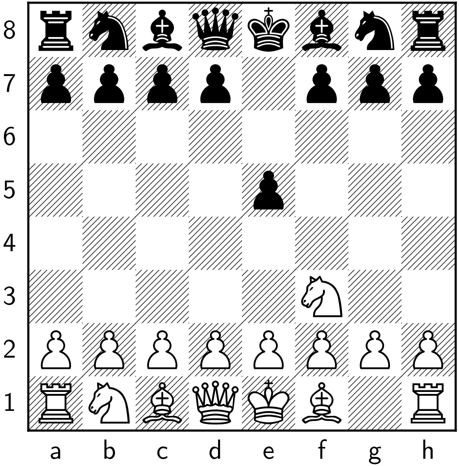
Posizione dopo la quarta mossa del nero. Come è andato il gioco ?



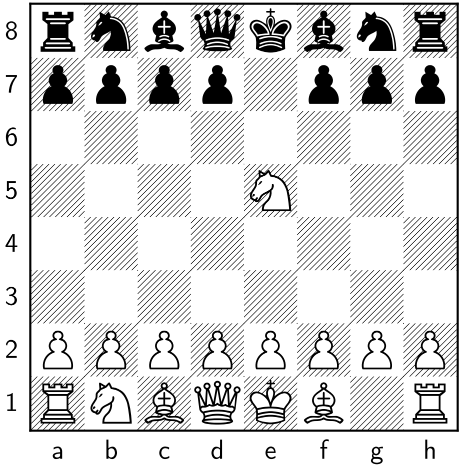
1 ♘f3



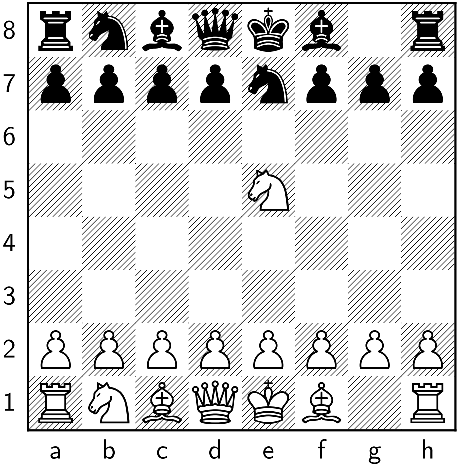
1 ♘f3 e5.



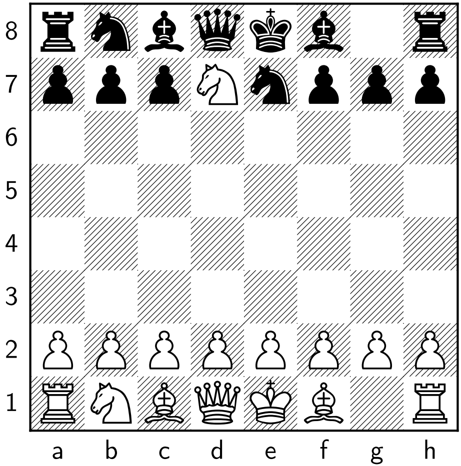
1 ♘f3 e5. 2 ♘×e5



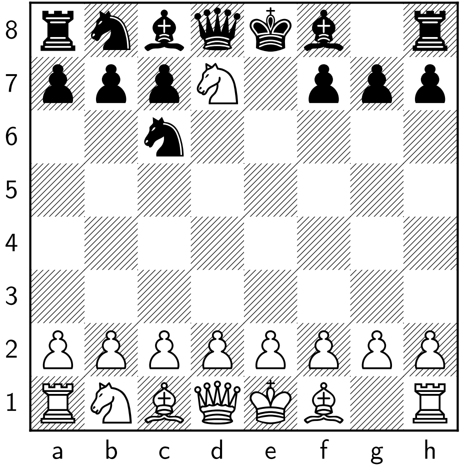
1 ♘f3 e5 2 ♘×e5 ♘e7



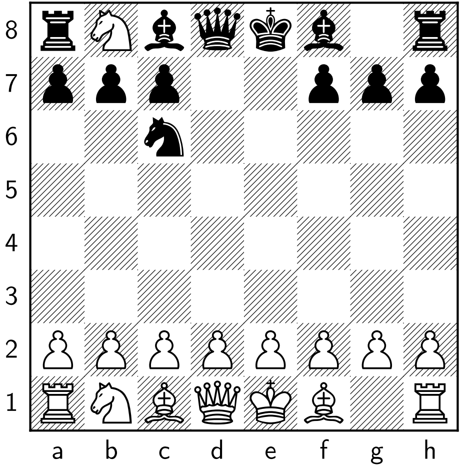
1 ♘f3 e5 2 ♘×e5 ♘e7 3 ♘×d7



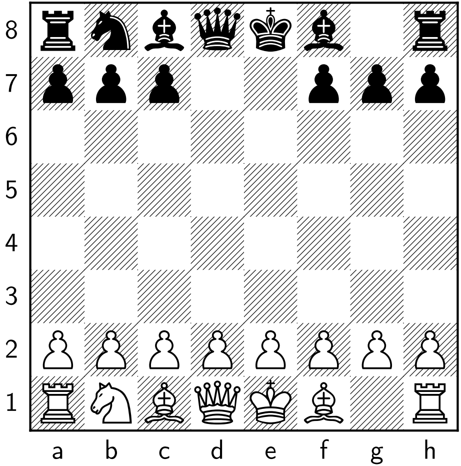
1 ♘f3 e5 2 ♘×e5 ♘e7 3 ♘×d7 ♘ec6



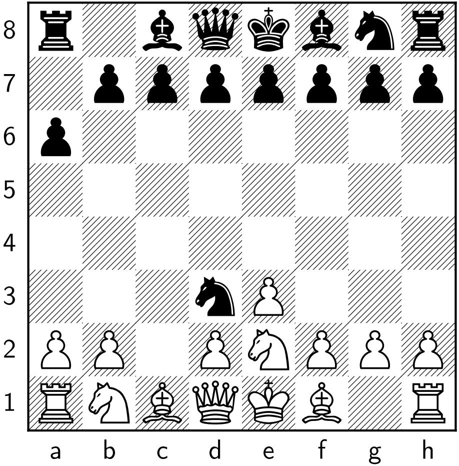
1 ♘f3 e5 2 ♘×e5 ♘e7 3 ♘×d7 ♘ec6 4 ♘×b8



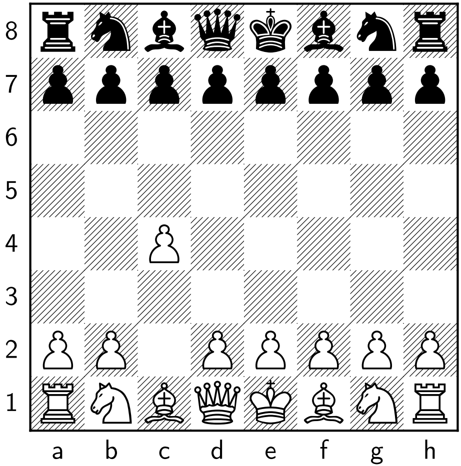
1 ♘f3 e5 2 ♘×e5 ♘e7 3 ♘×d7 ♘ec6 4 ♘×b8 ♘×b8



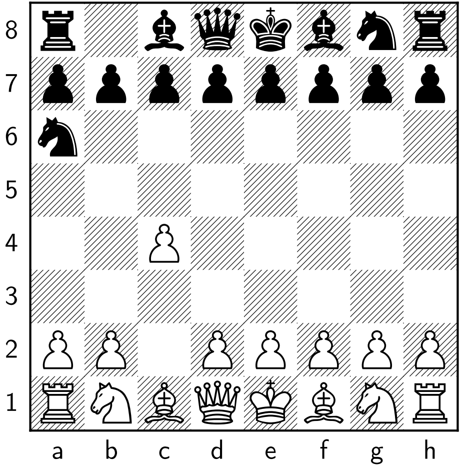
Posizione dopo la quarta mossa del nero. Come è andato il gioco ?



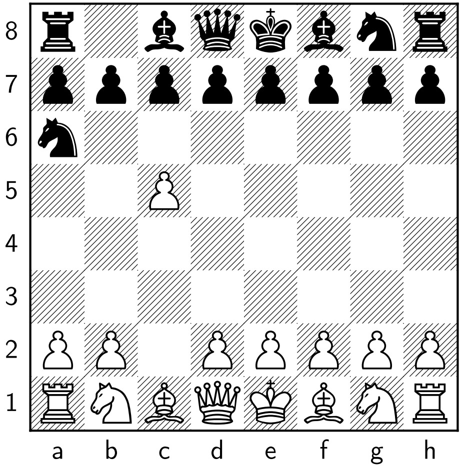
1 c4



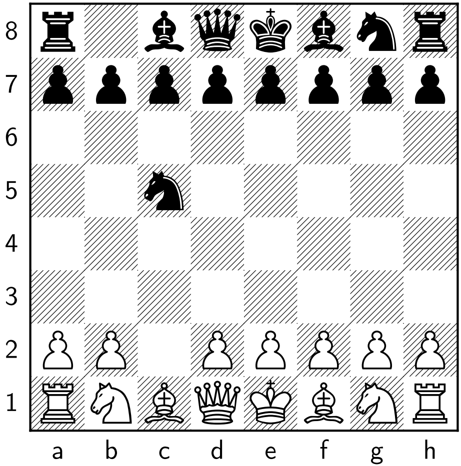
1 c4 ♘a6



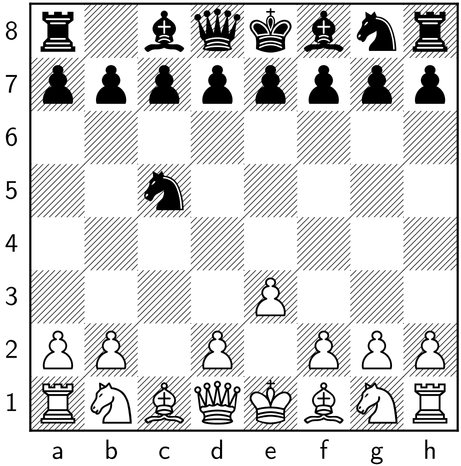
1 c4 ♘a6 2 c5



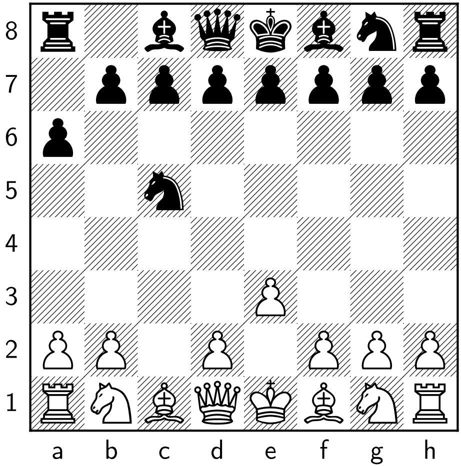
1 c4 ♘a6 2 c5 ♘×c5



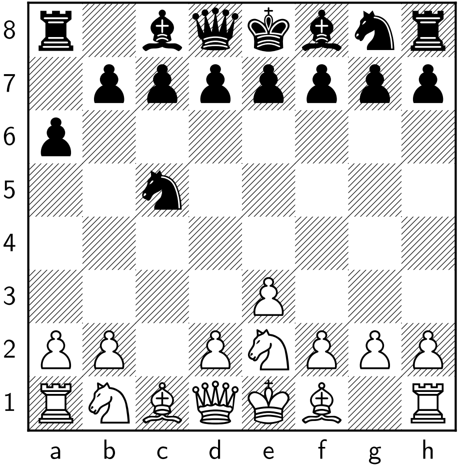
1 c4 ♘a6 2 c5 ♘×c5 3 e3



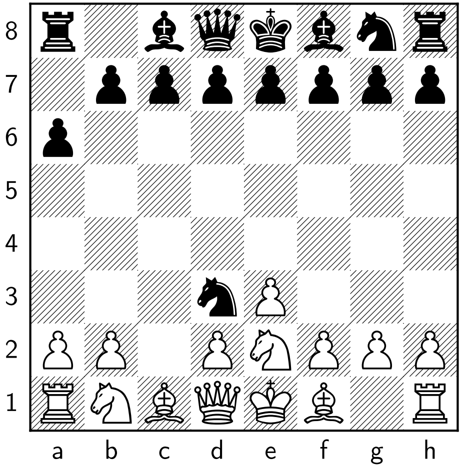
1 c4 ♘a6 2 c5 ♘×c5 3 e3 a6



1 c4 ♘a6 2 c5 ♘×c5 3 e3 a6 4 ♘e2



1 c4 ♘a6 2 c5 ♘×c5 3 e3 a6 4 ♘e2 ♘d3



Bibliografia

- J. Watkins: *Across the board: the mathematics of chessboard problems*, Princeton University Press, 2004
- M. Petković: *Mathematics and Chess*, Dover Publications, 1997.
- A. Yaglom e I. Yaglom: *Challenging mathematical problems with elementary solutions: combinatorial analysis and probability theory*, Vol. 1, Holden-Day, 1964.
- N. Elkies e R. Stanley: *The mathematical Knight*, Math. Intelligencer **25**, n.1, (2003), 22-34.
- G. Fricke e altri: *Combinatorial problems on chessboards: a brief survey*, Graph Theory, Combinatorics and Applications **1** (1995), 507–528.

Pagine Web

- http://en.wikipedia.org
  Ricca fonte di informazioni (di tipo storico e generale): segnaliamo in particolare le pagine sui campioni (Steinitz, Lasker, ...).
- http://www.permutationpuzzles.org/chess/math_chess.html
  Informazioni e links ad altre risorse
- http://www.math.harvard.edu/~elkies/chess.html
  Home page di Noam Elkies, ad Harvard.
- http://www.northnet.org/weeks/SoS
  Giochi su varie superfici (toro, bottiglia di Klein, Nastro di Moebius, ecc...); collegato al libro *The Shape of Space*.